T O P O L O G I A
WPPT I, sem. letni

EGZAMIN I
B

Wrocław, 25 czerwca 2007

ZADANIE 1.
Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną i $f : X \to \mathbb{R}$ dowolną funkcją rzeczywistą określoną na X.
a) Sprawdź, czy

$$d'(x, y) = d(x, y) + |f(x) - f(y)|$$

jest metryką na X?
b) Udowdodnij coś o funkcji f w tej metryce?

ROZWIĄZANIE: Tak, jest to metryka, bo: 1. Jeśli $x = y$ to $d'(x, y) = 0 + 0 = 0$, jeśli zaś $x \neq y$, to już samo $d(x, y)$ jest większe od zera, a tym bardziej $d(x, y)$ plus coś nieujemnego. 2. Oczywiście $d'(x, y) = d'(y, x)$. 3. $d'(x, y) + d'(y, z) = d(x, y) + |f(x)-f(y)|+d(y, z)+|f(y)-f(z)| = d(x, y)+d(y, z)+|f(x)-f(y)|+|f(y)-f(z)| \leq d(x, z) + |f(x) - f(y) + f(y) - f(z)| = d(x, z) + +|f(x) - f(z)| = d'(x, z)$.
f jest ciągła, a nawet Lipschitzowska (ze stałą1) w tej metryce, bo $d'(x, y) \geq |f(x)- f(y)|$.

ZADANIE 2.
a) Niech $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem w przestrzeni metrycznej zupełnej (X, d) spełniającym warunek

$$\exists_{M\in\mathbb{R}} \forall_{n\in\mathbb{N}} \quad n^2 d(a_n, a_{n+1}) \leq M.$$

Czy ciąg ten musi być zbieżny?

ROZWIĄZANIE: Tak. Wtedy szereg $d(a_n, a_{n+1})$ jest zbieżny (nie przekracza $\frac{M}{n^2}$). Dalej patrz rozwiązanie zadania 2 b) grupy A.

ZADANIE 3.
Oblicz granicę ciągu rekurencyjnego

$a_1 = 13\pi$,

$a_{n+1} = \frac{7}{8}a_n + 50$.

ROZWIĄZANIE: Rozważmy odwzorowanie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadane wzorem

$$f(x) = \frac{7}{8}x + 50.$$

Jego pochodna jest stała i wynosi $\frac{7}{8}$, a więc spełnia ono warunek Lipshitza ze stałą mniejsza od jeden, czyli jest to odwzorowanie zbliżające. Rozważany ciąg, to ciąg iteracji $f^n(a_1)$. Z twierdzenia Banacha ($\mathbb{R}$ jest przestrzenią zupełną) ciąg ten zbiega do jedynego fixpunktu odwzorowania f. Aby znaleźć ten fixpunkt rozwiązujemy równanie $f(x) = x$, czyli $x = \frac{7}{8}x+50$. Rozwiązaniem jest $x_0 = 400$ i to jest szukana granica.

ZADANIE 4.
Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną zupełną i niech A, B będą podzbiorami X, przy czym A jest I kategorii. Czy B jest na pewno I kategorii, jeśli istnieje

a) homeomorfizm $\phi : X \to X$ taki, że $\phi(A) = B$?
b) homeomorfizm $\psi : A \to B$ (jako przestrzeni metrycznych z metryką d)?
(przy odpowiedziach pozytywnych podaj dowody, przy negatywnych - kontrprzykłady)

ROZWIĄZANIE: a) Tak. Homeomorfizm X w X zachowuje kategorię.
b) Nie. Weźmy X w postaci ciągu zbieżnego i jego granicy. Dowolne podzbiory jednopunktowe są homeomorficzne, ale tylko punkt graniczny jest I kategorii (domknięty i brzegowy). Pozostałe są zbiorami otwartymi.

ZADANIE 5.
Niech A będzie podzbiorem prostej $\mathbb{R}$ ze zwykłą metryką zdefiniowanym następująco:

$$A = \Big\{x : \text{dla każdego } n \in \mathbb{N} \text{ istnieje liczba wymierna } \tfrac{p}{q},\ (q \in \mathbb{N},\ p \in \mathbb{Z}), \text{ taka że } q > n \text{ oraz } |x - \tfrac{p}{q}| < \tfrac{1}{q^5}\Big\}.$$

Udowodnij, że A jest zbiorem rezydualnym.

ROZWIĄZANIE: Po pierwsze, A zawiera wszystkie liczby wymierne, bo każdą taką liczbę można zapisać jako $\frac{p}{q}$ z dowolnie dużym mianownikiem q (przez rozszerzanie ułamka). Wtedy $|\frac{p}{q} - \frac{p}{q}| = 0$, a to jest mniejsze od $\frac{1}{q^5}$. W szczególności A jest zbiorem gęstym. Można zapisać

$$A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{q\geq n} \bigcup_{p\in\mathbb{Z}} \left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q^5}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^5}\right),$$

a to jest ewidentnie zbiór typu G_δ (sumy przedziałów otwartych są otwarte, a pierwszy przekrój jest przeliczalny). Zatem A jest rezydualny.

Tomasz Downarowicz